Министерство образования и науки Российской Федерации
Школа-интернат для одаренных детей имени Н.Н. Дубинина

Факультативный курс
Математика для будущих инженеров, физиков и математиков

Лекция
Иррациональные выражения

Вопросы

1. ***Преобразование иррациональных выражений***
2. ***Деление иррациональных выражений***

Разработал
Преподаватель факультативного курса*, доктор технических наук,*
профессор кафедры «*Математика и моделирование*» *ВГУЭС*
И.П. Стрельцов

2008 – 2009 учебный год

Преобразование иррациональных выражений

Основные определения.

Иррациональное выражение – **алгебраическое выражение, содержащее радикалы (корни)**.
Рассмотрим преобразование ***иррациональных выражений*** с радикалами разной степени. ***Решение задач***, которые будут рассматриваться нами далее, основывается на известных ***формулах разложения двучленов*** $a^n - b^n$ ***и*** $a^n + b^n$ ***на множители разного типа***.
При этом ***степень выбираемого нами двучлена*** $a^n - b^n$ ***или*** $a^n + b^n$ ***всегда должна быть идентична степени радикалов, присутствующих в условии нашей задачи***.
При решении задач, в которых следует ***избавиться от иррациональности***, числитель и знаменатель исходной дроби следует умножить на соответствующий ***дополнительный множитель***, вытекающий из разложения на множители выбранного нами двучлена.

Пример 1. ***Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби*** $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$.

Решение

Здесь следует применить формулу разности квадратов: $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$.
Положим: $a = 3,\ b = \sqrt{5}$. Теперь, умножив числитель и знаменатель исходной дроби на величину $a + b = 3 + \sqrt{5}$, последовательно находим:

$$\frac{4}{3-\sqrt{5}} = \frac{4\cdot(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})} = \frac{4\cdot(3+\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2} = 3+\sqrt{5}\,, \quad \frac{4}{3-\sqrt{5}} = 3+\sqrt{5}\,.$$

Ответ. ***Дробь*** $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}} = 3+\sqrt{5}$.

Пример 2. ***Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби*** $\dfrac{110}{3-\sqrt[3]{5}}$.

Решение

Здесь следует применить формулу разности кубов: $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$.
Положим: $a = 3,\ b = \sqrt[3]{5}$. Теперь, умножив числитель и знаменатель исходной дроби на величину $a^2 + ab + b = 3^2 + 3\cdot\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}$, последовательно находим:

$$\frac{110}{3-\sqrt[3]{5}} = \frac{110\cdot(3^2+3\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}{(3-\sqrt[3]{5})\cdot(3^2+3\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})} = \frac{110\cdot(9+3\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})}{3^3-(\sqrt[3]{5})^3} = 5\cdot(9+3\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}).$$

Ответ. ***Дробь*** $\dfrac{110}{3-\sqrt[3]{5}} = 5\cdot(9+3\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})$ ***или*** $\dfrac{110}{3-\sqrt[3]{5}} = 45+15\cdot\sqrt[3]{5}+5\cdot\sqrt[3]{25}$.

Пример 3. ***Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби*** $\dfrac{64}{3+\sqrt[3]{5}}$.

Решение

Здесь следует применить формулу суммы кубов: $a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$.
Положим: $a = 3,\ b = \sqrt[3]{5}$. Теперь, умножив числитель и знаменатель исходной дроби на величину $a^2 - ab + b = 3^2 - 3\cdot\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}$, последовательно находим:

$$\frac{64}{3+\sqrt[3]{5}} = \frac{64\cdot(3^2-3\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}{(3+\sqrt[3]{5})\cdot(3^2-3\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})} = \frac{64\cdot(9-3\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})}{3^3+(\sqrt[3]{5})^3} = 2\cdot(9-3\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}).$$

Ответ. ***Дробь*** $\dfrac{64}{3+\sqrt[3]{5}} = 2\cdot(9-3\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25})$ ***или*** $\dfrac{64}{3+\sqrt[3]{5}} = 18-6\cdot\sqrt[3]{5}+2\cdot\sqrt[3]{25}$.

Пример 4. ***Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби*** $\dfrac{121}{25+5\cdot\sqrt[3]{4}+2\cdot\sqrt[3]{2}}$.

Решение. ***Здесь применим формулу разности кубов:*** $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$.

Положим: $a=5,\ b=\sqrt[3]{4}$. Теперь, умножив числитель и знаменатель исходной дроби на величину $a-b=5-\sqrt[3]{4}$, последовательно находим:

$$\frac{121}{25+5\cdot\sqrt[3]{4}+2\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{121\cdot\left(5-\sqrt[3]{4}\right)}{\left(5^2+5\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2}\right)\cdot\left(5-\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{121\cdot\left(5-\sqrt[3]{4}\right)}{5^3-\left(\sqrt[3]{4}\right)^3}=5-\sqrt[3]{4}.$$

Ответ. ***Дробь*** $\dfrac{121}{25+5\cdot\sqrt[3]{4}+2\cdot\sqrt[3]{2}}=5-\sqrt[3]{4}$.

Пример 5. ***Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби*** $\dfrac{238}{3-\sqrt[5]{5}}$.

Решение

Здесь надо применить формулу: $a^5-b^5=(a-b)\cdot(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$.

Положим: $a=3,\ b=\sqrt[5]{5}$. Теперь, умножив числитель и знаменатель исходной дроби на величину $a^4+a^3b+a^2b^2+b^4=3^4+3^3\cdot\sqrt[5]{5}+3^2\cdot\sqrt[5]{5^2}+3\cdot\sqrt[5]{5^3}+\sqrt[5]{5^4}$, находим:

$$\frac{238}{3-\sqrt[5]{5}}=\frac{238\cdot\left(3^4+3^3\cdot\sqrt[5]{5}+3^2\cdot\sqrt[5]{5^2}+3\cdot\sqrt[5]{5^3}+\sqrt[5]{5^4}\right)}{\left(3-\sqrt[5]{5}\right)\left(3^4+3^3\cdot\sqrt[5]{5}+3^2\cdot\sqrt[5]{5^2}+3\cdot\sqrt[5]{5^3}+\sqrt[5]{5^4}\right)},$$

$$\frac{238}{3-\sqrt[5]{5}}=\frac{238\cdot\left(3^4+3^3\cdot\sqrt[5]{5}+3^2\cdot\sqrt[5]{5^2}+3\cdot\sqrt[5]{5^3}+\sqrt[5]{5^4}\right)}{3^5-\left(\sqrt[5]{5}\right)^5}=3^4+3^3\cdot\sqrt[5]{5}+3^2\cdot\sqrt[5]{5^2}+3\cdot\sqrt[5]{5^3}+\sqrt[5]{5^4},$$

$$\frac{238}{3-\sqrt[5]{5}}=81+27\cdot\sqrt[5]{5}+9\cdot\sqrt[5]{25}+3\cdot\sqrt[5]{125}+\sqrt[5]{625}.$$

Ответ. ***Дробь*** $\dfrac{238}{3-\sqrt[5]{5}}=81+27\cdot\sqrt[5]{5}+9\cdot\sqrt[5]{25}+3\cdot\sqrt[5]{125}+\sqrt[5]{625}$.

Пример 6. ***Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби*** $\dfrac{61}{2-\sqrt[6]{3}}$.

Решение. ***Здесь применим формулу:*** $a^6-b^6=(a-b)\cdot(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$.

Положим: $a=2,\ b=\sqrt[6]{3}$. Умножив числитель и знаменатель исходной дроби на величину $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5=2^5+2^4\cdot\sqrt[6]{3}+2^3\cdot\sqrt[6]{3^2}+2^2\cdot\sqrt[6]{3^3}+2\cdot\sqrt[6]{3^4}+\sqrt[6]{3^5}$, находим:

$$\frac{61}{2-\sqrt[6]{3}}=\frac{61\cdot\left(2^5+2^4\cdot\sqrt[6]{3}+2^3\cdot\sqrt[6]{3^2}+2^2\cdot\sqrt[6]{3^3}+2\cdot\sqrt[6]{3^4}+\sqrt[6]{3^5}\right)}{\left(2-\sqrt[6]{3}\right)\left(2^5+2^4\cdot\sqrt[6]{3}+2^3\cdot\sqrt[6]{3^2}+2^2\cdot\sqrt[6]{3^3}+2\cdot\sqrt[6]{3^4}+\sqrt[6]{3^5}\right)},$$

$$\frac{61}{2-\sqrt[6]{3}}=\frac{61\cdot\left(2^5+2^4\cdot\sqrt[6]{3}+2^3\cdot\sqrt[6]{3^2}+2^2\cdot\sqrt[6]{3^3}+2\cdot\sqrt[6]{3^4}+\sqrt[6]{3^5}\right)}{2^6-\left(\sqrt[6]{3}\right)^6},$$

$$\frac{61}{2-\sqrt[6]{3}}=2^5+2^4\cdot\sqrt[6]{3}+2^3\cdot\sqrt[6]{3^2}+2^2\cdot\sqrt[6]{3^3}+2\cdot\sqrt[6]{3^4}+\sqrt[6]{3^5},$$

$$\frac{61}{2-\sqrt[6]{3}}=32+16\cdot\sqrt[6]{3}+8\cdot\sqrt[6]{3^2}+4\cdot\sqrt[6]{3^3}+2\cdot\sqrt[6]{3^4}+\sqrt[6]{3^5}.$$

Ответ. ***Дробь*** $\dfrac{61}{2-\sqrt[6]{3}}=32+16\cdot\sqrt[6]{3}+8\cdot\sqrt[6]{9}+4\cdot\sqrt[6]{27}+2\cdot\sqrt[6]{81}+\sqrt[6]{243}$.

Пример 7. ***Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби*** $\dfrac{610}{25+\sqrt[4]{225}}$.

Решение

Поставленную нам задачу можно решить двумя способами, применяя разные формулы разложения на множители двучлена четвёртого порядка a^4-b^4.

Первый способ.

Представим заданную нам дробь иначе: $\dfrac{610}{25+\sqrt[4]{225}}=\dfrac{610}{5^2+\sqrt[4]{15^2}}$. Положим: $a=5,\ b=\sqrt[4]{15}$.

Здесь применим формулу: $a^4-b^4=(a^2+b^2)\cdot(a^2-b^2)$. Числитель и знаменатель нашей исходной иррациональной дроби умножим на величину $a^2-b^2=25-\sqrt[4]{225}=5^2-\sqrt[4]{15^2}$.

Далее последовательно находим:

$$\frac{610}{25+\sqrt[4]{225}}=\frac{610\cdot\left(5^2-\sqrt[4]{15^2}\right)}{\left(5^2+\sqrt[4]{15^2}\right)\cdot\left(5^2-\sqrt[4]{15^2}\right)}=\frac{610\cdot\left(5^2-\sqrt[4]{15^2}\right)}{5^4-\left(\sqrt[4]{15}\right)^4}=5^2-\sqrt[4]{15^2}=25-\sqrt[4]{225}.$$

Окончательно ***решение первым способом*** имеет такой вид: $\dfrac{610}{25+\sqrt[4]{225}}=25-\sqrt[4]{225}$.

Ответ. ***Дробь*** $\dfrac{610}{25+\sqrt[4]{225}}=25-\sqrt[4]{225}$.

Второй способ.

Положив $a=25,\ b=\sqrt[4]{225}$, ***применим формулу:*** $a^4-b^4=(a+b)\cdot(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$.

Умножив числитель и знаменатель исходной иррациональной дроби на величину $a^3-a^2b+ab^2-b^3=25^3-25^2\cdot\sqrt[4]{225}+25\cdot\sqrt[4]{225^2}-\sqrt[4]{225^3}$, последовательно находим:

$$\frac{610}{25+\sqrt[4]{225}}=\frac{610\cdot\left(25^3-25^2\cdot\sqrt[4]{225}+25\cdot\sqrt[4]{225^2}-\sqrt[4]{225^3}\right)}{\left(25+\sqrt[4]{225}\right)\cdot\left(25^3-25^2\cdot\sqrt[4]{225}+25\cdot\sqrt[4]{225^2}-\sqrt[4]{225^3}\right)},$$

$$\frac{610}{25+\sqrt[4]{225}}=\frac{610\cdot\left(25^3-25^2\cdot\sqrt[4]{225}+25\cdot\sqrt[4]{225^2}-\sqrt[4]{225^3}\right)}{25^4-\sqrt[4]{225^4}},$$

$$\frac{610}{25+\sqrt[4]{225}}=\frac{610\cdot\left(25^3-25^2\cdot\sqrt[4]{225}+25\cdot\sqrt[4]{225^2}-\sqrt[4]{225^3}\right)}{390400},$$

$$\frac{610}{25+\sqrt[4]{225}}=\frac{1}{640}\left(25^3-25^2\cdot\sqrt[4]{225}+25\cdot\sqrt[4]{225^2}-\sqrt[4]{225^3}\right).$$

Решение ***вторым способом*** такое: $\dfrac{610}{25+\sqrt[4]{225}}=\dfrac{1}{640}\left(25^3-25^2\cdot\sqrt[4]{225}+25\cdot\sqrt[4]{225^2}-\sqrt[4]{225^3}\right)$.

Ответ. ***Дробь*** $\dfrac{610}{25+\sqrt[4]{225}}=\dfrac{1}{640}\left(25^3-25^2\cdot\sqrt[4]{225}+25\cdot\sqrt[4]{225^2}-\sqrt[4]{225^3}\right)$.

Выводы и рекомендации.

Следует особо отметить, что некоторые из примеров можно решать ***разными способами***.

При изучении этого раздела рекомендуется решить ещё два примера ***двумя способами***.

Избавиться от иррациональности в знаменателе дробей:

$$\frac{727}{27+\sqrt[6]{8}},\quad \frac{1448}{27-\sqrt[6]{125}}.$$

Примеры – иллюстрация к преобразованию иррациональных выражений разного вида.

Пример 8. ***Какой множитель обращает выражение*** $\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}$ ***в целое число?***

Решение

Поставленную нам задачу можно решить двумя способами: ***использовать формулу разности квадратов*** $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ ***до получения требуемого результата, применить формулу разложения двучлена*** $a^n \pm b^n$ ***с выделением линейного члена***.

Первый способ.

Умножив заданное иррациональное выражение на сопряжённое выражение, получим:

$\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{5}\right)=\sqrt{3^2}-\sqrt[4]{5^2}=3-\sqrt{5}$.

Теперь умножим полученную разность $3-\sqrt{5}$ ***на сумму*** $3+\sqrt{5}$ ***и находим:***

$\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)=9-5=4$.

Следовательно, ***искомый множитель будет таким:***

$\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)=3\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt[4]{5}+\sqrt{15}-\sqrt[4]{125}$ ***или*** $3\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt[4]{5}+\sqrt{15}-\sqrt[4]{125}$.

Второй способ. Пусть: $\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{5}$, $a=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{9}=9^{\frac{1}{4}}$, $b=\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}$.

Применив формулу разложения $a^4-b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$, ***находим искомое целое число и искомый множитель:*** $a^4-b^4=\left(\sqrt{3}\right)^4-\left(\sqrt[4]{5}\right)^4=3^2-5=4$,

$a^3-a^2b+ab^2-b^3=\left(\sqrt{3}\right)^3-\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt[4]{5}+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt[4]{5}\right)^2-\left(\sqrt[4]{5}\right)^3=3\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt[4]{5}+\sqrt{15}-\sqrt[4]{125}$.

Искомый множитель, полученный двумя способами и обращающий ***иррациональное выражение*** $\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}$ ***в целое число*** 4***, имеет такой вид:*** $3\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt[4]{5}+\sqrt{15}-\sqrt[4]{125}$.

Пример 9. ***Какой множитель обращает выражение*** $\sqrt{3}+\sqrt[3]{7}$ ***в целое число?***

Решение

Первый способ. ***Умножив заданную сумму радикалов на их разность, получим:***

$\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{7}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{7}\right)=\sqrt{3^2}-\sqrt[3]{7^2}=3-\sqrt[3]{7^2}$.

Теперь умножим полученную разность $3-\sqrt[3]{7^2}$ ***на сумму*** $3+\sqrt[3]{7^2}$ ***и находим:***

$\left(3-\sqrt[3]{7^2}\right)\cdot\left(3+\sqrt[3]{7^2}\right)=9-\sqrt[3]{7^4}$.

Последующее применение принципа умножения на сопряжённое число не позволит получить требуемый результат. **Вывод: первый способ здесь применить нельзя.**

Второй способ. Пусть: $\sqrt{3}+\sqrt[3]{7}=\sqrt[6]{3^3}+\sqrt[6]{7^2}$, $a=\sqrt[6]{3^3}=3^{\frac{3}{6}}$, $b=\sqrt[6]{7^2}=7^{\frac{2}{6}}$.

Применив здесь формулу разложения $a^6-b^6=(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$,

находим искомый множитель: $a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5=$

$$=\left(3^{\frac{3}{6}}\right)^5-\left(3^{\frac{3}{6}}\right)^4\cdot 7^{\frac{2}{6}}+\left(3^{\frac{3}{6}}\right)^3\cdot\left(7^{\frac{2}{6}}\right)^2-\left(3^{\frac{3}{6}}\right)^2\cdot\left(7^{\frac{2}{6}}\right)^3+3^{\frac{3}{6}}\cdot\left(7^{\frac{2}{6}}\right)^4-\left(7^{\frac{2}{6}}\right)^5 .$$

Искомое целое число **будет таким:** $a^6-b^6=\left(\sqrt{3}\right)^6-\left(\sqrt[3]{7}\right)^6=3^3-7^2=-22$.

Искомые – ***множитель и целое число*** – найдены с применением ***формулы разложения***.

Анализ решения примеров 8, 9. Рекомендации.

Анализ решения примеров 8, 9 показывает, что применить оба способа решения в таких задачах не всегда представляется возможным. **Оба способа можно применить тогда,** ***когда степени радикалов будут чётными числами, но всегда вида*** 2^n, $n=1,2,3,\ldots$.

Это могут быть числа $2,4,8,16,32,64,\ldots$ в любом их сочетании.

Способ же решения аналогичных задач, когда применяется формула разложения $a^n \pm b^n$ с **выделением линейного члена, является** ***универсальным***.

Деление иррациональных выражений

Пример 1. Найти частное в таком иррациональном выражении: $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt{a} - b \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[6]{b}}$.

Решение

В этой задаче числитель и знаменатель представляют собой разность иррациональных выражений. Искомое частное также должно состоять из аналогичных выражений. Делимое, делитель и частное в задачах такого типа должны быть связаны друг с другом строго определённым соотношением:

$$a^2 \cdot \sqrt{a} - b \cdot \sqrt[3]{b^2} = \left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[6]{b}\right) \cdot \left[\left(\sqrt[4]{a}\right)^{n-1} + \ldots + \left(\sqrt[6]{b}\right)^{n-1}\right].$$

Это соотношение должно быть аналогом известной формулы:

$$k^n - l^n = (k-l) \cdot f_{n-1}(k,l),$$

$$k^n - l^n = (k-l) \cdot f_{n-1}(k,l) = (k-l) \cdot (k^{n-1} + k^{n-2}l + k^{n-3}l^2 + \ldots + k^2 l^{n-3} + kl^{n-2} + l^{n-1}).$$

Для первого члена числителя находим: $a^2 \cdot \sqrt{a} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^n$, $a^{\frac{5}{2}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^n$, $\dfrac{5}{2} = \dfrac{n}{4}$, $n = 10$.

И для второго члена числителя получим: $b \cdot \sqrt[3]{b^2} = \left(\sqrt[6]{b}\right)^n$, $b^{\frac{5}{3}} = \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^n$, $\dfrac{5}{3} = \dfrac{n}{6}$, $n = 10$.

Итак, делимое представляет собой разность ***десятых степеней членов*** $\sqrt[4]{a}$ и $\sqrt[6]{b}$.

Отсюда имеем такую формулу для делимого: $\left(\sqrt[4]{a}\right)^{10} - \left(\sqrt[6]{b}\right)^{10}$.

Теперь при значении $n = 10$ требуемые разложения будут такими:

$$k^{10} - l^{10} = (k-l) \cdot f_9(k,l),$$

$$k^{10} - l^{10} = (k-l) \cdot (k^9 + k^8 l + k^7 l^2 + k^6 l^3 + k^5 l^4 + k^4 l^5 + k^3 l^6 + k^2 l^7 + kl^8 + l^9),$$

$$\frac{k^{10} - l^{10}}{k-l} = f_9(k,\, l) = k^9 + k^8 l + k^7 l^2 + k^6 l^3 + k^5 l^4 + k^4 l^5 + k^3 l^6 + k^2 l^7 + kl^8 + l^9.$$

При значении $k = \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ и $l = \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{6}}$ ***искомое частное*** будет иметь такой вид:

$$f_9(k,\, l) = f_9\left(a^{\frac{1}{4}}, b^{\frac{1}{6}}\right) = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^9 + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^8 \cdot b^{\frac{1}{6}} + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^7 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^2 + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^6 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^3 +$$

$$+ \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^5 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^4 + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^5 + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^6 + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^7 + a^{\frac{1}{4}} \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^8 + \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^9.$$

Ответ.

Частное в заданном иррациональном выражении имеет такой вид:

$$\frac{k^{10} - l^{10}}{k-l} = f_9(k,\, l) = k^9 + k^8 l + k^7 l^2 + k^6 l^3 + k^5 l^4 + k^4 l^5 + k^3 l^6 + k^2 l^7 + kl^8 + l^9,$$

$$\frac{a^2 \cdot \sqrt{a} - b \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[6]{b}} = f_9\left(a^{\frac{1}{4}}, b^{\frac{1}{6}}\right) = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^9 + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^8 \cdot b^{\frac{1}{6}} + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^7 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^2 + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^6 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^3 +$$

$$+ \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^5 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^4 + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^5 + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^6 + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^7 + a^{\frac{1}{4}} \cdot \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^8 + \left(b^{\frac{1}{6}}\right)^9.$$

Пример 2. Найти частное в таком иррациональном выражении: $\dfrac{2.5\cdot\sqrt[4]{80}+4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}+4\cdot\sqrt{\dfrac{1}{8}}}$.

Решение

Перепишем заданное нам иррациональное выражение иначе:

$$\frac{2.5\cdot\sqrt[4]{80}+4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}+4\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}}=\frac{\sqrt[4]{3125}+\sqrt{32}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[4]{5^5}+\sqrt{2^5}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt{2}},\quad \frac{2.5\cdot\sqrt[4]{80}+4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}+4\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}}=\frac{\sqrt[4]{5^5}+\sqrt{2^5}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt{2}}.$$

В этой задаче числитель и знаменатель представляют собой сумму двух иррациональных выражений. Искомое частное также должно состоять из аналогичных выражений. Делимое, делитель и частное в задачах такого типа должны быть связаны друг с другом строго определённым соотношением: $\sqrt[4]{5^5}+\sqrt{2^5}=\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt{2}\right)\cdot\left[\left(\sqrt[4]{5}\right)^{n-1}-\ldots+\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\right]$.

Это соотношение должно быть аналогом известной формулы:

$$k^n+l^n=(k+l)\cdot f_{n-1}(k,l),$$

$$k^n+l^n=(k+l)\cdot f_{n-1}(k,l)=(k+l)\cdot(k^{n-1}-k^{n-2}l+k^{n-3}l^2-\ldots-k^3l^{n-4}+k^2l^{n-3}-kl^{n-2}+l^{n-1}).$$

Для первого члена числителя находим: $\sqrt[4]{5^5}=\left(\sqrt[4]{5}\right)^n$, $5^{\frac{5}{4}}=\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^n$, $\dfrac{5}{4}=\dfrac{n}{4}$, $n=5$.

И для второго члена числителя получим: $\sqrt{2^5}=\left(\sqrt{2}\right)^n$, $2^{\frac{5}{2}}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^n$, $\dfrac{5}{2}=\dfrac{n}{2}$, $n=5$.

Итак, ***делимое – сумма пятых степеней членов*** $\sqrt[4]{5}$ ***и*** $\sqrt{2}$. Здесь имеем: $\left(\sqrt[4]{5}\right)^5+\left(\sqrt{2}\right)^5$.

Теперь при значении $n=5$ требуемые разложения будут такими:

$$k^5+l^5=(k+l)\cdot f_4(k,l),\quad k^5+l^5=(k+l)\cdot(k^4-k^3l+k^2l^2-kl^3+l^4),$$

$$\frac{k^5+l^5}{k+l}=f_4(k,\,l)=k^4-k^3l+k^2l^2-kl^3+l^4.$$

При значении $k=\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}$ ***и*** $l=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ ***искомое частное*** будет иметь такой вид:

$$\frac{k^5+l^5}{k+l}=f_4(k,\,l)=k^4-k^3l+k^2l^2-kl^3+l^4,$$

$$f_4(k,\,l)=f_4\left(5^{\frac{1}{4}},\,2^{\frac{1}{2}}\right)=\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^4-\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^3\cdot2^{\frac{1}{2}}+\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2-5^{\frac{1}{4}}\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4,$$

$$\frac{2.5\cdot\sqrt[4]{80}+4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}+4\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}}=f_4\left(5^{\frac{1}{4}},\,2^{\frac{1}{2}}\right)=5-\sqrt[4]{500}+2\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt[4]{20}+4=9+2\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt[4]{20}\right)-\sqrt[4]{500}.$$

Ответ. ***Частное в заданном иррациональном выражении имеет такой вид:***

$$\frac{2.5\cdot\sqrt[4]{80}+4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}+4\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}}=\frac{\sqrt[4]{5^5}+\sqrt{2^5}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt{2}}=\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^4-\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^3\cdot2^{\frac{1}{2}}+\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2-5^{\frac{1}{4}}\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4,$$

$$\frac{2.5\cdot\sqrt[4]{80}+4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}+4\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}}=9+2\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt[4]{20}\right)-\sqrt[4]{500}.$$